

Studiul undelor staționare transversale în corzile vibrante

Scopul lucrării:

Se studiază propagarea undelor transversale într-o coardă elastică, urmărindu-se obținerea unor unde staționare, și determinarea vitezei de propagare a undelor transversale.

I. Considerații teoretice

Undele elastice reprezintă fenomenul de propagare în spațiu, din aproape în aproape a unei perturbații (oscilații), printr-un mediu elastic. În cazul propagării undelor transversale, particulele mediului oscilează perpendicular pe direcția de propagare. Undele transversale se pot propaga numai în medii solide elastice, deoarece la propagarea lor apar deformări de forfecare (perpendiculare pe direcția de propagare). În cazul propagării undelor elastice într-un mediu unidimensional, de exemplu într-o coardă (fir elastic cu secțiune constantă), ecuația diferențială ce descrie propagarea undelor transversale este:

$$\frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{\frac{T}{\mu}} \cdot \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

Prin identificare cu ecuația diferențială, generală, a unei:

$$\frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

se obține viteza frontului de undă, generat într-o coardă, cu densitatea liniară de masă (masa pe unitatea de lungime) $\mu = \frac{m}{l}$, supusă unei tensiuni mecanice T:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (3)$$

Dacă în coardă se propagă în sens direct unde progresive, iar în sens invers unde regresive, atunci soluția generală a ecuației diferențiale este de forma:

$$\Psi(x, t) = \Psi_p(t - x/v) + \Psi_r(t + x/v) \quad (4)$$

Pentru oscilațiile armonice, funcțiile de undă care descriu propagarea unei progresive și a unei regresive, sunt:

$$\begin{aligned} \Psi_p(t - x/v) &= A \cdot \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right] = A \cdot \sin(\omega t - kx) \\ \Psi_r(t + x/v) &= A \cdot \sin \left[\omega \left(t + \frac{x}{v} \right) + \pi \right] = A \cdot \sin(\omega t + kx + \pi) \end{aligned} \quad (5)$$

unde $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$ este modulul numărului de undă.

Undele staționare se formează prin interferența unei unde directe (undă progresivă) cu unda reflectată, de o suprafață reflectantă (unda regresivă), și sunt descrise de ecuația:

$$\Psi = \Psi_p + \Psi_r = 2A \cdot \cos \left(kx + \frac{\pi}{2} \right) \cdot \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (6)$$

sau:

$$\Psi = 2A \cdot \sin(kx) \cdot \cos(\omega t) \quad (7)$$

Ecuția (7) reprezintă ecuația undelor staționare, sau ecuația modurilor de vibrație într-o coardă. Conform ecuației (7), fiecare punct al mediului elastic va oscila cu o amplitudine constantă în timp, dar distribuită în spațiu după relația:

$$A(x) = 2A \cdot \sin(kx) \quad (8)$$

Acolo unde amplitudinea rezultantă este maximă, $A(x) = \pm 2A$, se obțin maxime de interferențe, numite ventre. Condiția pentru a obține maxime de interferențe (ventre), este:

$$\sin(kx) = \pm 1 \Rightarrow kx = (2n + 1) \cdot \frac{\pi}{2}, \text{ cu } n \in \mathbb{Z} \quad (9)$$

de unde se obțin pozițiile pentru ventre:

$$x_v = (2n + 1) \cdot \frac{\lambda}{4}, \quad (10)$$

Valorile minime ale amplitudinii rezultante, $A(x) = 0$, se obțin în anumite puncte numite noduri, unde avem minime de interferență. Condiția pentru a obține minime de interferență (noduri), este:

$$\sin(kx) = 0 \Rightarrow kx = n \cdot \pi, \text{ cu } n \in \mathbb{Z} \quad (11)$$

Adică, pentru pozițiile:

$$x_n = 2n \cdot \frac{\lambda}{4} \quad (12)$$

Se observă că poziția ventrelor și nodurilor nu depinde de timp, deci ele rămân nemișcate, de unde și numele de unde staționare.

În cazul unei corzi de lungime L , fixată în ambele capete, un tren continuu de unde transversale este reflectat și re-reflectat de capete. Deoarece coarda este fixă, la capete vor exista noduri. Conform relației (12), distanța dintre două noduri succesive este egală cu jumătate din lungimea de undă, deci lungimea L a corzii poate fi:

$$\frac{\lambda}{2}, 2 \cdot \frac{\lambda}{2}, 3 \cdot \frac{\lambda}{2}, \dots, n \cdot \frac{\lambda}{2} \quad (13)$$

Altfel spus, într-o coardă de lungime L , fixată la ambele capete, pot forma unde staționare numai undele cu lungime de undă:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \text{ unde } n = 1, 2, 3, \dots \quad (14)$$

sau undele cu frecvența:

$$v_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}, \text{ unde } n = 1, 2, 3, \dots \quad (15)$$

Pentru $n = 1$ se obține frecvența fundamentală, $v_1 = \frac{v}{2L}$, căreia îi corespunde modul fundamental de vibrație (armonica fundamentală), iar pentru celelalte valori ale lui n , în cazul în care nu există pierderi de energie (amortizare), se obțin armonicile superioare: $2v_1, 3v_1, 4v_1, \dots$. Modul fundamental de vibrație, și primele trei armonice superioare, pentru undele staționare generate într-o coardă fixată la ambele capete, sunt prezentate în Fig. 1.

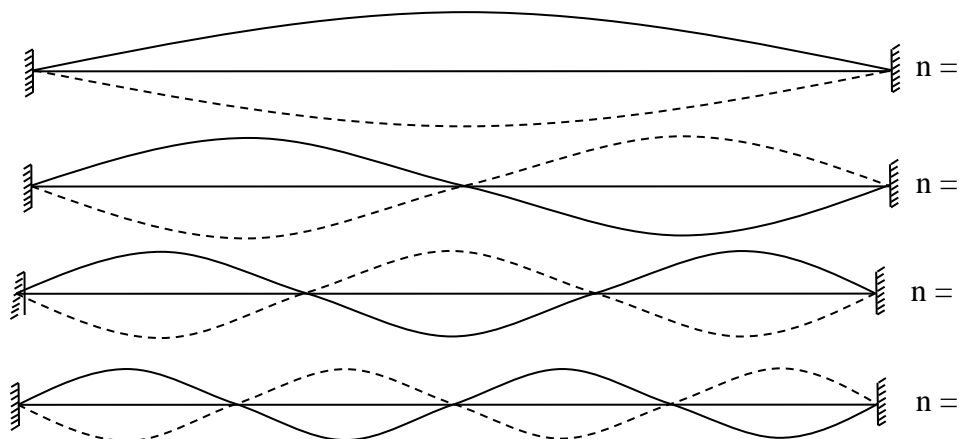


Fig. 1.

II. Metodica experimentală

II.1. Dispozitivul experimental

Dispozitivul experimental este prezentat în Fig. 2, și este format dintr-un suport, pe care este întins un fir de sârmă din cupru (coarda), și un generator de semnal.

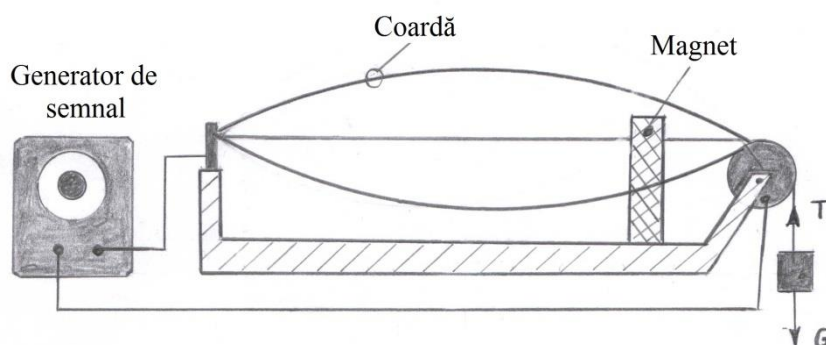


Fig. 2.

Coarda trece printre polii unui magnet permanent și este fixată la un capăt, iar celălalt capăt este trecut peste un scripete fix. De capătul corzii trecut peste scripete se atârnă corpuri de mase diferite, scopul fiind de a tensiona (întinde) coarda în mod diferit ($T = G = m \cdot g$). Prin coardă se trece un curent de audiofrecvență, provenit de la un generator de semnal care permite reglarea frecvenței și nivelului curentului. Excitarea corzii se face prin forța de interacțiune magnetică, între curentul care străbate coarda și câmpul magnetic constant produs de magnetul permanent ($F = B \cdot I \cdot L$).

II.2. Modul de lucru

- i. Se atârnă un corp de masă cunoscută la capătul corzii trecut peste scripete, pentru tensionarea ei;
- ii. Se măsoară lungimea corzii, L , și diametrul corzii, d , cu ajutorul unei rulete și a unui micrometru;
- iii. Se pornește generatorul de semnal, după ce s-au făcut legăturile electrice cu coarda;
- iv. Se modifică frecvența de excitare a corzii până când se constată în coardă, un regim evident de undă staționară;

- v. Se citesc frecvențele corespunzătoare modului fundamental, precum și frecvențele corespunzătoare primelor 3 armonice superioare;
- vi. Se repetă măsurătorile pentru o altă valoare a greutății, plasată la capătul corzii;
- vii. Se cunoaște densitatea cuprului $\rho = 8900 \text{ kg/m}^3$;
- viii. Datele obținute se trec în tabelul 1.

Tabelul 1.

L (m)	d (m)	ρ (kg/m ³)	m (kg)	v_t (m/s)	$\frac{\Delta v_t}{v_t}$ (%)	n	λ_n (m)	v_n (Hz)	v_{exp} (m/s)	$\frac{\Delta v_{\text{exp}}}{v_{\text{exp}}}$ (%)
						1				
						2				
						3				
						4				
						1				
						2				
						3				
						4				

II.3. Prelucrarea datelor experimentale

- i. Se calculează viteza teoretică de propagare a undelor transversale prin coardă, cu ajutorul relației:

$$v_t = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{2}{d} \sqrt{\frac{m \cdot g}{\pi \cdot \rho}} \quad (16)$$

- ii. Se determină lungimile de undă corespunzătoare diferitelor moduri de vibrație, cu ajutorul relației (14);
- iii. Se calculează viteza experimentală de propagare a undelor transversale, cu relația:

$$v_{\text{exp}} = \lambda_n \cdot v_n \quad (17)$$

- iv. Se calculează erorile relative cu ajutorul relațiilor:

$$\frac{\Delta v_t}{v_t} = \frac{\Delta d}{d} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta \pi}{\pi} + \frac{\Delta \rho}{\rho} \right) \quad (18)$$

$$\frac{\Delta v_{\text{exp}}}{v_{\text{exp}}} = \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta v}{v}$$